理学硕士学位论文

两类随机微分方程的均方渐近概周期解

王健伟

哈尔滨理工大学

2015 年 3 月

国内图书分类号: O177.5

理学硕士学位论文

两类随机微分方程的均方渐近概周期解

硕 士 研 究 生：　王健伟

导　　　　　师：　姚慧丽 教授

申请学位级别：　理学硕士

学 科 、 专 业：　基础数学

所 在 单 位：　应用科学学院

答 辩 日 期：　2015 年 3 月

授予学位单位：　哈尔滨理工大学

Classified Index: O177.5

Dissertation for the Master Degree in Science

Square-mean Asymptotically Almost Periodic Solutions for Two Classes of Stochastic Differential Equations

Candidate:	Wang Jianwei
Supervisor:	Prof. Yao Huili
Academic Degree Applied for:	Master of Science
Specialty:	Pure Mathematics
Date of Oral Examination:	March, 2015
University:	Harbin University of Science and Technology

哈尔滨理工大学硕士学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的硕士学位论文《两类随机微分方程的均方渐近概周期解》，是本人在导师指导下，在哈尔滨理工大学攻读硕士学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文研究工作做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签名：王健伟　　　　　　日期： 2015 年 3 月 30 日

哈尔滨理工大学硕士学位论文使用授权书

《两类随机微分方程的均方渐近概周期解》系本人在哈尔滨理工大学攻读硕士学位期间在导师指导下完成的硕士学位论文。本论文的研究成果归哈尔滨理工大学所有，本论文的研究内容不得以其它单位的名义发表。本人完全了解哈尔滨理工大学关于保存、使用学位论文的规定，同意学校保留并向有关部门提交论文和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权哈尔滨理工大学可以采用影印、缩印或其他复制手段保存论文，可以公布论文的全部或部分内容。

本学位论文属于

保密□，在　　年解密后适用授权书。

不保密☑。

（请在以上相应方框内打√）

作者签名：　王健伟　　　　　　日期：　　2015 年 3 月 30 日

导师签名：　姚慧丽　　　　　　日期：　　2015 年 3 月 30 日

两类随机微分方程的均方渐近概周期解

摘 要

随机微分方程是在解决某些具有随机现象的问题而建立起来的一类方程。随机微分方程在诸多领域有着广泛的应用，而随机微分方程的均方概周期类型解的存在性和唯一性在随机过程理论和概周期型函数理论的基础上更加具有研究意义。本文主要讨论了两类随机微分方程均方渐近概周期解的存在性和唯一性。

全文内容如下：

第一部分介绍了目前概周期型函数理论和随机微分方程理论的背景知识和主要研究成果，以及今后的发展趋势。

第二部分研究了一类非线性随机微分方程的均方渐近概周期解的存在唯一性。首先给出有关概周期随机过程的部分理论知识，介绍了一类一致渐近稳定的 C_0 半群的有关知识，然后讨论了联合连续函数的渐近概周期性质，利用该性质、Fubini 定理、Holder 不等式以及 Banach 不动点原理讨论了该方程均方渐近概周期解的存在唯一性。

第三部分在第二部分的理论基础上，讨论了一类非自治随机微分方程的均方渐近概周期解的存在唯一性。首先给出解决该类方程所需的理论知识和相关内容，然后介绍了一类算子开方族的基本概念，再应用 Fubini 定理、Holder 不等式以及 Banach 不动点原理讨论了该类方程均方渐近概周期解的存在唯一性。

关键词 随机微分方程；均方渐近概周期解；Banach 不动点原理

Square-mean Asymptotically Almost Periodic Solutions for Two Classes of Stochastic Differential Equations

Abstract

Stochastic differential equations are established in solving some stochastic phenomena. Many properties of stochastic differential equations have been used widely. The existence and uniqueness of square-mean almost periodic type solutions of the equation which base on almost periodic type function theory and stochastic process theory have more research significance. In this paper, the existence and uniqueness of square-mean asymptotically almost periodic solutions for two classes of stochastic differential equations are discussed.

The contents of this paper are as follow:

In the first section, some research and the background of almost periodic type functions theory and stochastic process theory are introduced at present. The development tendency of these equations is also introduced.

The second section, the existence and uniqueness of square-mean asymptotically almost periodic solutions for a class of nonlinear stochastic differential equation is discussed. At first some theoretical knowledges about almost periodic process and some theories of C_0 group are introduced, uniformly exponentially stable and strongly continuous family of operators. Then the asymptotically almost periodic properties of the jointly continuous functions are discussed. Finally, the existence and the uniqueness of square-mean asymptotically almost periodic solution for a class of stochastic differential equation is discussed by using the above property, Fubini theory, Holder inequality, and Banach fixed point theory.

The third section, according to the second section, the existence and the uniqueness of square-mean asymptotically almost periodic solution for a class of nonautonomous stochastic differential equation are discussed. First of all theoretical knowledges of solving this kind of differential equation are given. After this the concept of the operator ‘Acquistapace-Terreni’ conditions is introduced. Finally, the existence and the uniqueness of square-mean asymptotically almost periodic solution for this kind of differential equations are discussed which similar to the differential equations of the second section by using the Fubini theory, Holder inequality, and Banach fixed point theory.

Keywords stochastic differential equations, square-mean asymptotically almost

periodic solution, Banach fixed point theory

目 录

摘 要 I
Abstract II

第 1 章 绪论 1
  1.1 综述 1
    1.1.1 研究的背景及意义 1
    1.1.2 国内外研究现状和发展趋势 1
  1.2 课题来源 5
  1.3 本文的主要内容 5
第 2 章 一类随机微分方程的均方渐近概周期解 6
  2.1 引言 6
  2.2 预备知识 6
  2.3 主要结论 8
  2.4 本章小结 12
第 3 章 一类非自治随机微分方程的均方渐近概周期解 13
  3.1 引言 13
  3.2 预备知识 13
  3.3 主要结论 14
  3.4 本章小结 21
结论 22
参考文献 23
攻读学位期间发表的学术论文 27
致谢 28

第 1 章 绪论

1.1 综述

1.1.1 研究的背景及意义

概周期函数理论和应用的研究在现代数学中有着广泛而深远的理论意义，尤其近代渐近概周期、伪概周期的理论体系，就是在此基础之上建立起来的。显然，周期函数的全体无论在何种范数下都无法构成 Banach 空间，概周期函数理论的提出解决了这一问题。经过数十年的研究，诸多学者在这方面已取得了显著的理论成果，在微分方程、模型求解、工程数学等诸多领域。但相对其他方面而言，在随机过程领域的发展仍有待于提高。概周期函数在随机过程、随机微分方程领域的成果颇少，因此我们有必要对这方面的理论做更深入的研究和探讨。

在这些均方概周期随机过程中，既有概周期性，又有随机性，因此利用随机过程理论结合随机微分方程的有关知识讨论此类方程的均方概周期解的存在性及唯一性具有重大理论意义。然而，均方渐近概周期随机过程和均方伪概周期随机过程类比于渐近概周期函数和伪概周期函数理论而相继产生，拓展了该方向的研究范围，使其更具有实际意义、应用更为广泛。

1.1.2 国内外研究现状和发展趋势

概周期型函数理论是经典周期函数理论的延续。经典周期函数理论在某些实际应用中条件过强，以至于人们难以完全掌握，尽管其理论良好的刻画了许多特定条件下的理想无误差的周期问题，但是，在某些因素不能克服、无法避免的情况下，周期函数理论便不能有效的刻画一些实际的理学问题。此外，经典周期理论不满足可加性，在理论研究中涉及范围过于狭小，经典的 Banach 空间理论体系往往不能直接的应用到周期函数中。基于此类问题，人们很自然地试图去削弱周期函数的条件，引入比周期函数更广又具有一些类似性质的函数，即概周期函数。

1925—1926 年，丹麦数学家 H.Bohr 首次提出概周期函数理论[1,2] 。概周期函数是具有一定特殊性质的连续函数，是经典周期函数的推广，经过 S.Bochner、A.Besicovitch、J.Von Neumann、J.Favard 等人的研究，取得了一定的成果，使其理论体系有了进一步的完善，发展到了一个新的程度[3-6] 。随后，诸多学者们进一步对概周期函数理论进行了研究，一方面世在其自身理论上的深入研究，另一方面是其理论在数学其他方向甚至其他学科中的应用研究。

1926—1956 年间，V.V.Stepanov 去掉 H.Bohr 概周期函数理论中要求函数连续的假设，并且在此方面进行了诸多的理论研究，之后 H.Wely、A.S.Besicovitch、A.S.Kovanko 等人在此基础上做了大量的工作。W.Stepanov 把概周期推广到了 Lebesgue 可和函数空间上[7] 并且得到了 Lebesgue 可和空间上的概周期函数，在文献[5]中对此类概周期函数作了详尽的阐述，并且在微分方程的应用方面有了很大发展[8,9] 。

1933 年，S.Bochner 定义一类取值在 Banach 空间上的概周期函数，并且对此做了深入研究。这一研究为后来渐近概周期上、伪概周期上的一些定理证明奠定了基础。

1934 年，在 S.Bochner 的结果的基础上，J.Von Neumann 建立了代数学群论上的概周期函数理论[10] 。

1941 年，M.Frechet 在概周期函数基础上定义了渐近概周期函数[11] 。渐近概周期函数在某些特定情况下等价于概周期函数，是概周期函数的推广。它在微分方程理论中都有很重要的作用，使微分方程的应用更为广泛。

1949 年，W.F.Eberlein 建立了弱概周期函数理论[12] 。相较于概周期函数的要求连续函数轨道是相对紧的，在弱概周期函数的概念中只要求其轨道是相对弱紧的，因而弱概周期函数空间包含概周期函数空间。

1975 年，O.Onicesu 和 V.Istratescu 两人在其文章[13]中给出了概率空间上的随机概周期函数的定义，文章中 O.Onicesu 和 V.Istratescu 利用三角多项式逼近的原理，将随机概周期函数的定义用一个给定的三角多项式来逼近。随后 G.Cenusa，O.Onicesu，和 I.Sacuiu 出版的著作《Random Functions Almost Periodic in Probability》[14]中详细讨论了随机微分方程概周期解和随机过程的概周期理论问题。

1984 年，D.Sarason 在讨论积分算子理论方面，最早提出了遥远概周期函数和遥远概周期函数空间，并且给出了遥远概周期函数空间是比概周期函数空间更大的空间的证明过程[15]。这一理论的提出，延拓了概周期理论概念，使之应用更为广泛。

1992 年，C.Zhang 首先提出了伪概周期函数理论[16]，并给出了相应的理论的证明过程[17,18] 。全体伪概周期函数所构成的空间比之前所得到的概周期型函数空间更大，更具有实际应用价值。1994-1999 年间，C.Zhang 给出了概周期函数在空间上的诸多成果[19-22]，使其在其他数学领域中得到了充分讨论。 2003 年，C.Zhang 发表了专著作《Almost Periodic Type Functions and Ergodicity》一书，该著作阐述了概周期型函数理论的基本性质和应用。

取值于 R^d 随机过程 $\{X(t)\}_{t\in R}$ 的概周期性概念[23]最早是由 Slutsky 提出的，从 B^2- 概周期性的角度出发，获得了研究概周期平稳过程基本路径的合理充分条件，这对于我们进一步研究随机微分方程的概周期解是十分重要的。在 Morrozan 与 Tudor 的文章[24,25]中，首次介绍了分布的概周期性的概念，但此概念是在一维分布的假定下。紧接着，在 Hurd，Russek 以及 Surgailis 的文献[26]中定义了有限维分布的概周期。

2007 年，C.Zhang 的博士研究生江丽娜在其博士毕业论文中详细总结了概周期型函数的理论成果[27]，并且讨论随机过程在均方概周期方面的理论性质，包括伊藤积分和维纳过程的部分理论知识。

微分方程的概周期型解的研究在诸多领域都有其重要意义。近几年已有很多国内外学者对随机微分方程概周期型解的存在问题给出相关研究。Paul H.Bezandry 与 Toko Diagana 在文章[28]中提出均方概周期过程的概念，其定义如下：

一个连续的随机过程 $X:R\to L^2(\Omega,H)$ 被称作是均方概周期的，如果对于 $\forall\varepsilon>0$，都存在一个 $l(\varepsilon)>0$，使得在任意长度为 $l(\varepsilon)$ 的区间内至少包含一个 τ 有：

$$\sup_{t\in R} E\|X(t+\tau)-X(t)\|^2<\varepsilon$$

满足上述条件的随机过程的全体记为： $AP(R,L^2(\Omega,H))$ 。

自这类函数定义以来，一些数学工作者将此应用到一些方程中，讨论了中立型随机偏微分方程的一些性质[29-31]，然而，目前还没有相关文献研究过此随机微分方程的均方渐近概周期解，本课题将对此问题进行深入研究。

文献[28]研究了以下随机微分方程的均方概周期解的存在唯一性：

$$dX(t)=AX(t)dt+F(t,X(t))+G(t,X(t))dW(t) \qquad t\in[0,T]$$

其中 $A:D(A)\subset L^2(\Omega,H)\to L^2(\Omega,H)$ 是闭线性算子，它是一致指数稳定半群 $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ 的无穷小生成元，$F:L^2(\Omega,H)\to L^2(\Omega,H),G:L^2(\Omega,H)\to L^2(\Omega,L_2^0)$ 是满足一些附加条件的联合连续函数。作者在文献[32]中证明了该类随机微分方程的均方概周期解的存在性和唯一性。

2008 年， Paul H.Bezandry 与 Toka Diagana 在文章[33]中研究了一类半线性泛函随机积分微分方程的概周期解的存在性，通过应用不动点原理对其概周期期解的存在性和唯一性进行了探讨并给出证明，具体形式如下：

$$X'(t) = AX(t)dt + \int_{-\infty}^{t} C(t-u)G(t, X(t))dW(u) + \int_{-\infty}^{t} B(t-u)F_2(u, X(u))du + F_1(t, x(u))$$

其中 $A: D(A) \subset L^2(\Omega, H) \to L^2(\Omega, H)$ 是一个稠密定义的闭线性算子， B, C 分别是 $L^1(0,\infty), L^2(0,\infty)$ 的卷积，$F_1, F_2: L^2(\Omega, H) \to L^2(\Omega, H)$，$G: L^2(\Omega, H) \to L^2(\Omega, L_2^0)$ 都为联合连续函数。Paul H.Bezandry 与 Toka Diagana 又于 2009 年发表在《Electronic Journal of Differential Equations》的论文，研究了双曲型微分方程的均方概周期解[34]。

2010 年，Paul H.Bezandry 与 Toka Diagana 在文献[35]中证明了一类二阶随机微分方程存在唯一的均方概周期温和解。

经过长时间的研究和探索，Paul H.Bezandry 与 Toka Diagana 终于在 2011 年 4 月出版《Almost Periodic Stochastic Processes》[36]一书，该著作结合了作者之前发表的文章和诸多文献，详细的给出了随机过程均方概周期的定义以及相关定理，性质等等，更给出多种类型的随机微分方程、随机泛函微分方程、双曲方程等一系列方程的均方概周期解的存在条件并加以详细证明阐述。并且也提出均方伪概周期，均方伪概自守方面的定义及相关性质。

2012 年，Farouk Chérif 在文献[37]给出了一类随机微分方程在 Hilbert 空间上的均方伪概周期解，并且给出相关定义、定理、性质的证明。

2011 年 11 月，Paul H.Bezandry 与 Toka Diagana 在《P-th Mean Pseudo Almost Automorphic Mild Solutions to Some Nonautonomous Stochastic Differential Equations》[38]一文中，利用 Schauder 不动点给出了一类非自治随机微分方程的 P-th 伪概自守解。同时，Toka Diagana 在文献中[39]中给出了非自治微分方程的二次加权伪概周期解。

2011 年，姚慧丽教授给出了一类差分方程存在唯一的遥远概周期序列解的充分条件证明[40]。其后，在 2012 年中期，又分别给出了一类中立性微分方程和半线性微分方程的渐近概周期和渐近概自守解[41,42]。

2012 年，曹俊飞在其博士论文中详尽的给出了一类随机泛函微分方程的 P-th 渐近概周期解存在性的证明[43]，并给出了相关性质和推论。这里给出 P-th 期望概周期的相关定义，如下：

一个随机连续的随机过程 $X: R \to L^p(P, B)$ 被称作是 $p-$概周期的，如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，集合 $J(X, \varepsilon) := \left\{\tau : \sup_{t \in R} E \| X(t+\tau) - X(t) \|^p < \varepsilon\right\}$ 在 R 中是稠密的，

即存在常数 $l = l(\varepsilon) > 0$ ，使得对于 $\forall t \in R$ ，都有 $J(X,\varepsilon) \cap [t,t+l] \neq \varnothing$ 。随后，给出随机过程 $X : R \to L^p(P,B)$ 是 $p-$渐近概周期的定义：

一个连续的随机过程 $X : R \to L^p(P,B)$ 被称作是 $p-$期望渐近概周期的，如果存在两个随机过程 $Y(t) \in AP(R, L^p(P,B)), Z(t) \in C_0(R, L^p(P,B))$, 满足 $X(t) = Y(t) + Z(t)$ 。用符号 $AAP(R, L^p(P,B))$ 表示所有从 R 到 $L^p(P,B)$ 的 $p-$期望渐近概周期随机过程构成的空间。这里：

$$C_0 = \{h : R \to L^p(\Omega, H) \setminus h\text{是连续的, 且}\lim_{t\to\infty} E\|h(t)\|^p = 0\}.$$

2013 年，Liu W.G, Luo J.W 对一类半线性随机微分方程的概周期解的存在性进行了讨论[44]，且给出了实际应用举例，明确了概周期理论在随机微分方程中的应用方向。

2014 年，纪德生研究了加权 Stepanov 伪概自守函数的基本性质，应用 Banach 压缩映像原理得到了两类 Volterra 积分方程的加权伪概自守解的存在唯一性[45]。随后，在其博士论文中讨论了 Stepanov 伪概自守和多元伪概自守的基本性质，给出了一类单调发展方程的 Stepanov 伪概自守解和一类半线性椭圆方程的伪概周期弱解的存在唯一性的证明[46]。

2015 年初，王奇，陆地成在《Almost Periodic Solutions For Impulsive Neutral Functional Differential Systems》[47]中证明了一类脉冲中立泛函微分方程存在唯一的概周期解，使其在方程的应用方面有了进一步的推广。

1.2 课题来源

来自于导师姚慧丽教授的黑龙江省教育厅科学技术研究项目（12511110）。

1.3 本文的主要内容

1、连续随机过程的均方渐近概周期性；

（1） 学习并研究均方概周期过程的定理内容及其相关性质；

（2） 研究均方渐近概周期过程的一些基本定理、性质及推论。

2、讨论一类半线性随机微分方程的均方渐近概周期解，具体方程如下：

$$dx(t) = \left(Ax(t) + a\int_{-\infty}^{t} e^{-b(t-s)} Ax(s)ds\right)dt + f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t), \qquad t \in R$$

其中 a,b 为常数，A 为 $A : D(A) \subset L^2(\Omega,H) \to L^2(\Omega,H)$ 上线性算子，f,g 是满足

特定条件的联合连续函数：

$$f:R\times L^2(\Omega,H)\to L^2(\Omega,H),g:R\times L^2(\Omega,H)\to L^2(\Omega,L_2^0)$$

3、讨论一类非自治随机微分方程的均方渐近概周期解，具体方程如下：

$$dX(t)=A(t)X(t)dt+F(t,X(t))dt+G(t,X(t))dW(t)$$

其中 $A(t)$（$t\in R$）是满足“Acquistapace-Terreni” 条件的一族稠密的闭合线性算子，存在常数 $\lambda_0\ge 0$，$\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$L,K\ge 0$，$\alpha,\beta\in(0,1]$，且 $\alpha+\beta>1$，有：

$$\Sigma_\theta\cup\{0\}\subset\rho(A(t)-\lambda_0)，\ \|R(\lambda,A(t)-\lambda_0)\|\le\frac{K}{1+|\lambda|}$$

和

$$\|(A(t)-\lambda_0)R(\lambda,A(t)-\lambda_0)[R(\lambda_0,A(t))-R(\lambda_0,A(s))]\|\le L|t-s|^\alpha|\lambda|^\beta$$

其中 $t,s\in R$，$\lambda\in\Sigma_\theta:=\{\lambda\in C-\{0\}:|\arg\lambda|\le\theta\}$，$F:R\times L^2(P,H)\to L^2(P,H)$ 和 $G:R\times L^2(P,H)\to L^2(P,L_2^0)$ 是满足一定条件的联合连续函数。$\{W(t),t\in R\}$ 是一个可测 $Q-Wiener$ 过程。

第 2 章 一类随机微分方程的均方渐近概周期解

2.1 引言

概周期函数理论是丹麦数学家 H.Bohr 在 1925-1926 年间提出的，全体概周期函数构成的空间是周期函数的完备化空间。经过 S.Bochner、J.Von Neumann、V.V.Stepanov 等人的研究，概周期函数理论发展到了一个全新的高度。近些年有很多文献将概周期型函数理论应用到了某些微分方程中，讨论了概周期型解的存在唯一性。随机过程的概周期理论最早是由 Slutsky 在文献[23]33 中提出，从 B^2（均方 Banach 空间）角度出发，得到了研究概周期平稳过程基本路径的合理条件，此后得到了更多的推广。近期，美国数学家 Paul H.Bezandry 与 Toka Diagana 分别对一类半线性随机泛函微分方程和双曲型随机微分方程的均方概周期解的存在性进行了研究，这些研究成果在诸多方面被引用和推广。

文献[44]35 中作者研究一类随机积分-微分方程的均方概周期解，方程如下：

$$dx(t)=\left(Ax(t)+a\int_{-\infty}^{t}e^{-b(t-s)}Ax(s)ds\right)dt+f(t,x(t))dt+g(t,x(t))dW(t) \qquad (2\text{-}1)$$

本章将讨论方程（2-1）的均方渐近概周期解的存在性和唯一性问题。

2.2 预备知识

本节 (Ω,F,P) 表示完备的概率空间。$(J,\|\cdot\|_J),(H,\|\cdot\|)$ 表示两个可分的 Banach 空间，$L_2(J,H)$ 是指所有 $J\to H$ 上所有线性算子的全体并赋予范数 $\|\cdot\|_2$。假定 $\{W(t),t\in R\}$ 是一个在 (Ω,F,P) 上的 F_t- 可测 $Q-Wiener$ 过程，其中 $F_t=\sigma\{W(s),s\le t\}$。$L^2(\Omega,H)$ 表示一类强可测的均方可积的随机过程的全体。易知 $L^2(\Omega,H)$ 是一个 Banach 空间，其中范数定义为 $\|X\|_{L^2(\Omega,H)}=(E\|X\|^2)^{1/2}$，这里 $E(h)=\int_\Omega h(\omega)dP(\omega)$。

定义 2.1[28]820 一个连续的随机过程 $X:R\to L^2(\Omega,H)$ 被称作是均方概周期的，是指如果对任意 $\varepsilon>0$，存在一个数 $l(\varepsilon)>0$ 使得任意长度为 $l(\varepsilon)$ 的区间至少包含一个 τ 使得：

$$\sup_{t\in R} E\|X(t+\tau)-X(t)\|^2<\varepsilon$$

所有均方概周期随机过程的全体记为 $AP(R,L^2(\Omega,H))$。

定义 2.2 一个连续的随机过程 $X:R\to L^2(\Omega,H)$ 被称作是均方渐近概周期的，是指如果对 X 能写成

$$X=g+\varphi，\quad g\in AP(R,L^2(\Omega,H))，\quad \varphi\in SMC_0$$

其中 $SMC_0=\{h:R\to L^2(\Omega,H)\,|\,h$ 是连续的，且 $\lim\limits_{t\to\infty}E\|h(t)\|^2=0\}$。均方渐近概周期随机过程的全体记为 $AAP(R,L^2(\Omega,H))$。

定义 2.3[44]36 一个联合连续函数 $f:R\times L^2(\Omega,H_1)\to L^2(\Omega,H_2),(t,y)\to f(t,y)$ 关于 $t\in R$ 被称作是均方概周期的且对于 $y\in\Delta$ 一致成立（其中 $\Delta\subset L^2(\Omega,H_1)$ 是紧的），是指如果对于任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 $l(\varepsilon,\Delta)>0$，使得任意长度为 $l(\varepsilon,\Delta)>0$ 的区间至少包含一个 τ，有：

$$\sup_{t\in R} E\|f(t+\tau,y)-f(t,y)\|_2^2<\varepsilon$$

定义 2.4 一个联合连续函数 $f:R\times L^2(\Omega,H_1)\to L^2(\Omega,H_2),(t,y)\to f(t,y)$ 关于 $t\in R$ 被称作是均方渐近概周期的且对于 $y\in\Delta$ 一致成立（其中 $\Delta\subset L^2(\Omega,H_1)$ 是紧的），是指如果有：

$f=g+\varphi$，$g\in AP(R\times L^2(\Omega,H_1),L^2(\Omega,H_2))$，$\varphi\in SMC_0(R\times L^2(\Omega,H_1),L^2(\Omega,H_2))$。

定理 2.1[44]36 若联合连续函数 $f:R\times L^2(\Omega,H_1)\to L^2(\Omega,H_2),(t,y)\to f(t,y)$ 关于 $t\in R$ 是均方概周期的且对于 $y\in\Delta$ 一致成立（其中 $\Delta\subset L^2(\Omega,H_1)$ 是紧的），且 f 满足 Lipschitz 条件：

$$E\|f(t,y)-f(t,z)\|_2^2\le K\,E\|y-z\|_1^2，\quad y,z\in L^2(\Omega,H_1),t\in R$$

常数 $K>0$。则对于任意均方概周期随机过程 $\theta:R\to L^2(\Omega,H_1)$，都有 $t\to f(t,\theta(t))$ 是均方概周期随机过程。

定理 2.2 若联合连续函数 $f:R\times L^2(\Omega,H_1)\to L^2(\Omega,H_2),(t,y)\to f(t,y)$ 关于 $t\in R$ 是均方渐近概周期的且对于 $y\in\Delta$ 一致成立（其中 $\Delta\subset L^2(\Omega,H_1)$ 是紧的），且 f 满足 Lipschitz 条件：$E\|f(t,y)-f(t,z)\|_2^2\le K_1E\|y-z\|_1^2$，$y,z\in L^2(\Omega,H_1)$，$t\in R$，常数 $K_1>0$。则对于任意均方渐近概周期随机过程 $\theta:R\to L^2(\Omega,H_1)$，都有 $t\to f(t,\theta(t))$ 是均方渐近概周期随机过程。

证 由 $f\in AAP(R\times L^2(\Omega,H_1),L^2(\Omega,H_2))$，有 $f=g+h$，其中

$$g \in AP(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))，\quad h \in SMC_0(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$$

同理由$\theta \in AAP(R, L^2(\Omega, H_1))$有$\theta = \theta_1 + \theta_2$，其中

$$\theta_1 \in AP(R, L^2(\Omega, H_1))，\quad \theta_2 \in SMC_0(R, L^2(\Omega, H_1))$$

从而有$f(t, \theta(t))$可写成

$$\begin{aligned} f(t,\theta(t)) &= g(t,\theta_1(t)) + f(t,\theta(t)) - g(t,\theta_1(t)) \\ &= g(t,\theta_1(t)) + f(t,\theta(t)) - f(t,\theta_1(t)) + h(t,\theta_1(t)) \end{aligned}$$

由定理 2.1 可知： $g(t,\theta_1(t)) \in AP(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$，即$g(t,\theta_1(t))$是均方概周期随机过程。

以下考虑$f(t,\theta(t)) - f(t,\theta_1(t))$，由已知条件得：

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} E\| f(t,\theta(t)) - f(t,\theta_1(t))\|^2 &\le \lim_{t\to\infty} K_1 E\|\theta - \theta_1\|^2 \\ &= K_1 \lim_{t\to\infty} E\|\theta_2(t)\|^2 = 0 \end{aligned}$$

则由上述可知$f(t,\theta(t)) - f(t,\theta_1(t)) \in SMC_0(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$成立。

最后考虑$h(t,\theta_1(t))$。令$A = \overline{\theta_1(R)}$，则$A$是紧的，因此对任意$\varepsilon > 0$，存在$x_1, x_2, \cdots x_m \in A$使得$\theta_1(R) \subset \bigcup_{i=1}^{m} (x_i, \varepsilon / 2K_1)$。

考虑开集：

$$B_i = \{t \in R : \theta_1(t) \in B(x_i, \varepsilon / 2K_1)\}, 1 \le i \le m$$

由不等式$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$、定理 2.1 及上述紧集性质得到：

$$\begin{aligned} E\|h(t,\theta_1(t))\|^2 &= E\|h(t,\theta_1(t)) - h(t,x_i) + h(t,x_i)\|^2 \\ &\le 2E\|h(t,\theta_1(t)) - h(t,x_i)\|^2 + 2E\|h(t,x_i)\|^2 \\ &\le 2K_1 E\|\theta_1(t) - x_i\|^2 + 2E\|h(t,x_i)\|^2 \end{aligned}$$

由此得：当$t \to \infty$时，$E\|h(t,\theta_1(t))\|^2 \to 0$，这就证明了 $h(t,\theta_1(t)) \in SMC_0$。综上所述，$f(t,\theta(t)) \in AAP(R \times L^2(\Omega, H_1), L^2(\Omega, H_2))$，即$f(t,\theta(t))$是均方渐近概周期随机过程。

口

2.3 主要结论

这一部分将研究方程（2-1）

$$dx(t) = \left(Ax(t) + a\int_{-\infty}^{t} e^{-b(t-s)} Ax(s)ds\right)dt + f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t)，\quad t \in R$$

的均方渐近概周期解的存在唯一性，其中a,b为常数。

根据文献[44]38-39 可知，方程解的形式为：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)f(s,x(s))ds+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)g(s,x(s))dW(s)\,,t\in R \tag{2-2}$$

由于A是一个具有指数稳定增长的c_0半群$\{T(t)\}_{t\geq 0}$的无穷小生成元，因此存在常数$M>1$，$\delta>0$满足：$\|T(t)\|\leq Me^{-\delta t}\quad(t>0)$。

定理 2.3 若方程（2-1）满足以下的假设：

（H1）联合连续函数$f\in AAP(R\times L^2(\Omega,H_1),L^2(\Omega,H_2))$且满足 Lipchitz 条件：

$$E\|f(t,y)-f(t,z)\|^2\leq K_fE\|y-z\|^2$$

对于$y,z\in\Delta,\Delta\subset L^2(\Omega,H)$成立，其中$K_f$为常数；

（H2）联合连续函数$g\in AAP(R\times L^2(\Omega,H_1),L^2(\Omega,H_2))$且满足 Lipchitz 条件：

$$E\|g(t,y)-f(t,z)\|^2\leq K_gE\|y-z\|^2$$

对于$y,z\in\Delta,\Delta\subset L^2(\Omega,H)$成立，其中$K_g$为常数；

（H3）$\dfrac{M^2(K_f+K_g)}{\delta}<1$。

则方程（2-1）存在唯一的均方渐近概周期解。

证 因为方程（2-1）解的形式为式（2-2），所以只需研究式（2-2）定义的函数$x(t)$的均方渐近概周期性。记

$$\begin{aligned}x(t)&=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)f(s,x(s))ds+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)g(s,x(s))dW(s)\\&=(S_fx)(t)+(S_gx)(t)\end{aligned} \tag{2-3}$$

先证明$(S_fx)(t)$是均方渐近概周期的，根据定理 2.2 可知，只需证明

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)f(s)ds$$

是均方渐近概周期的，其中f是均方渐近概周期过程。令：$f=h+\varphi$，h,φ分别是f的概周期分量和SMC_0分量，则有：

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)h(s)ds+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)\varphi(s)ds=F_1(t)+F_2(t)$$

由文献[44]37 知$F_1(t)$是均方概周期随机过程。以下证明$F_2(t)\in SMC_0$。

应用 Holder 不等式、Fubini 定理，得到：

$$\begin{aligned}E\|F_2(t)\|^2&=E\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)\varphi(s)ds\|^2\\&\leq E\left\{\int_{-\infty}^{t}\|T(t-s)\|^2\,ds\int_{-\infty}^{t}\|\varphi(s)\|^2\,ds\right\}\\&\leq\int_{-\infty}^{t}\|T(t-s)\|^2\,ds\left\{\int_{-\infty}^{t}E\|\varphi(s)\|^2\,ds\right\}\end{aligned} \tag{2-4}$$

因为$\varphi \in SMC_0$，所以对任意$\varepsilon > 0$，存在$M > 0$，当$t \in R \setminus [-M, M]$，即$|t| > M$时有 $E\|\varphi(t)\|^2 < \varepsilon$ 成立。由已知 $\|T(t)\| \le Me^{-\delta t}$ 得到，当 $t \to \infty$ 时，有$\|T(t)\| \le Me^{-\delta t} \to 0$，因此对于上述的$\varepsilon$，存在$M^{'} > 0$，当$t > M^{'}$时有$\|T(t)\| \le \varepsilon$。令$N = M + M^{'}$

（1） 当$t < -N$时，式（2-4）可化为：

$$\int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)\|^2 \,\mathrm{ds} \left\{\int_{-\infty}^{t} E\|\varphi(s)\|^2 \, ds\right\}$$

$$\le \frac{M^2}{2\delta} \cdot \int_{-\infty}^{t} E\|\varphi(s)\|^2 ds$$

上式的积分区间为$[t, -\infty]$，依题意$t \to -\infty$时，对于任意的$\varepsilon_1 > 0$有$t - (-\infty) < \varepsilon_1$成立，则式（2-4）可化为：

$$\int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)\|^2 \,\mathrm{ds} \left\{\int_{-\infty}^{t} E\|\varphi(s)\|^2 \, ds\right\} < \frac{M^2 \varepsilon^2 \varepsilon_1}{2\delta}$$

由ε和ε_1的任意性可知：$\lim\limits_{t \to \infty} E\|F_2(t)\|^2 = 0$。

（2） 当$t > N$时，（2-4）式可化为：

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)\|^2 \,\mathrm{ds} \left\{\int_{-\infty}^{t} E\|\varphi(s)\|^2 \, ds\right\} \\
&\le \int_{-\infty}^{-M} \|T(t-s)\|^2 \,\mathrm{ds} \left\{\int_{-\infty}^{-M} E\|\varphi(s)\|^2 \, ds\right\} \\
&+ \int_{-M}^{M} \|T(t-s)\|^2 \,\mathrm{ds} \left\{\int_{-M}^{M} E\|\varphi(s)\|^2 \, ds\right\} \\
&+ \int_{M}^{\infty} \|T(t-s)\|^2 \,\mathrm{ds} \left\{\int_{M}^{\infty} E\|\varphi(s)\|^2 \, ds\right\} \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

易知$I_1 < \varepsilon$成立，事实上I_1的积分区间与（1）中的积分区间类似，两者均可保证$E\|\varphi(t)\|^2 < \varepsilon$条件成立，故易知$I_1 < \varepsilon$。

对于I_2，由于$t > N = M + M^{'}, -M < s < M$，则由此可知$t - s > M^{'}$成立，得到$\|T(t-s)\| < \varepsilon$成立，由此可知：

$$I_2 = \int_{-M}^{M} \|T(t-s)\|^2 \,\mathrm{ds} \left\{\int_{-M}^{M} E\|\varphi(s)\|^2 \, ds\right\} < \varepsilon^2 \int_{-M}^{M} E\|\varphi(s)\|^2 \, ds$$

因为$\|\varphi(s)\|$是有界的，故而$\int_{-M}^{M} E\|\varphi(s)\|^2 \, ds$有界，由此得到$I_2 < \varepsilon$成立。

I_3的积分区间完全在$R \setminus [-M, M]$上，显然$E\|\varphi(t)\|^2 < \varepsilon$的，故有：$I_3 < \varepsilon$。

综合I_1, I_2, I_3，根据ε的任意性可知：$\lim\limits_{t \to \infty} E\|F_2(t)\|^2 = 0.$ 由以上（1）、（2）可知$F_2 \in SMC_0(R, L^2(\Omega, H))$。

由此得到$F(t)\in AAP(R,L^2(\Omega,H))$，根据定理 2.2 知，（2-3）式中$(S_f x)(t)$分量是均方渐近概周期的，即$(S_f x)(t)\in AAP(R\times L^2(\Omega,H),L^2(\Omega,H))$。

其次，给出$(S_g x)(t)$是均方渐近概周期过程的证明，只需证：

$$G(t)=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)g(s)dW(s)$$

是均方渐近概周期的。由g是均方渐近概周期过程，可令$g=g_1+\varphi_1$， g_1,φ_1分别是g的概周期分量和SMC_0分量。从而可得到：

$$G(t)=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)g_1(s)dW(s)+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)\varphi_1(s)dW(s)=G_1(t)+G_2(t)$$

文献[44]37 中已证明$G_1(t)$是概周期随机过程，仅需证明$G_2(t)\in SMC_0$即可。

$$\begin{aligned}E\|G_2(t)\|^2&=E\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)\varphi_1(s)dW(s)\|^2\\&\le E\Big\{\int_{-\infty}^{t}\|T(t-s)\|^2\,ds\int_{-\infty}^{t}\|\varphi_1(s)\|^2\,ds\Big\}\\&\le\int_{-\infty}^{t}\|T(t-s)\|^2\,ds\Big\{\int_{-\infty}^{t}E\|\varphi_1(s)\|^2\,ds\Big\}\end{aligned}$$

已知$\varphi_1\in SMC_0$，类似证明$F_2(t)$是SMC_0分量的过程，易知$\lim\limits_{t\to\infty}E\|G_2(t)\|^2=0$，因此有$G(t)\in AAP(R,L^2(\Omega,H))$。根据定理 2.2 知$(S_g x)(t)$是均方渐近概周期随机过程。

综合上述$(S_f x)(t),(S_g x)(t)$的证明，得到方程（2-2）式定义的$x(t)$是均方渐近概周期的，即方程（2-1）存在均方渐近概周期解。

最后证明方程（2-1）具有唯一的均方渐近概周期解。

令$y,z\in AAP(R,L^2(\Omega,H))$，定义两个映射：

$$\begin{aligned}\prod Y(t)&=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)f(s,y(s))ds+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)g(s,y(s))dW(s)\\&=(S_f y)(t)+(S_g y)(t)\end{aligned}\tag{2-5}$$

$$\begin{aligned}\prod Z(t)&=\int_{-\infty}^{t}T(t-s)f(s,z(s))ds+\int_{-\infty}^{t}T(t-s)g(s,z(s))dW(s)\\&=(S_f z)(t)+(S_g z)(t)\end{aligned}\tag{2-6}$$

通过 Holder 不等式，Fubini 定理和假设（H1），得到：

$$\begin{aligned}E\|(S_f y)(t)-(S_f z)(t)\|^2&=E\|\int_{-\infty}^{t}T(t-s)[f(s,y(s))-f(s,z(s))]ds\|^2\\&\le E\Big\{\int_{-\infty}^{t}\|T(t-s)\|^2\,ds\int_{-\infty}^{t}\|f(s,y(s))-f(s,z(s))\|^2\,ds\Big\}\\&\le(\int_{-\infty}^{t}[Me^{-\delta(t-s)}]^2)ds)\int_{-\infty}^{t}E\|f(s,y(s))-f(s,z(s))\|^2ds\end{aligned}$$

$$\le \frac{M^2}{2\delta}\cdot K_f \sup_{t\in R} E\|y-z\|^2 \tag{2-7}$$

根据上述证明过程和假设（H2）有：

$$E\|(S_g y)(t)-(S_g z)(t)\|^2 = E\|\int_{-\infty}^{t} g(t-s)[f(s,y(s))-g(s,z(s))]dW(s)\|^2$$

$$\le E\left\{\int_{-\infty}^{t}\|T(t-s)\|^2\,ds\int_{-\infty}^{t}\|g(s,y(s))-g(s,z(s))\|^2\,ds\right\}$$

$$\le \left(\int_{-\infty}^{t}[Me^{-\delta(t-s)}]^2)ds\right)\int_{-\infty}^{t}E\|g(s,y(s))-g(s,z(s))\|^2 ds$$

$$\le \frac{M^2}{2\delta}\cdot K_g \sup_{t\in R} E\|y-z\|^2 \tag{2-8}$$

利用式（2-7）、（2-8）和不等式$(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$得到：

$$E\|\prod Y(t)-\prod Z(t)\|^2 = E\|(S_f y)(t)+(S_g y)(t)-(S_f z)(t)-(S_g z)(t)\|^2$$

$$\le 2E\|(S_f y)(t)-(S_f z)(t)\|^2 + 2E\|(S_g y)(t)-(S_g z)(t)\|^2$$

$$\le \frac{M^2}{\delta}\cdot K_f \sup_{t\in R} E\|y-z\|^2 + \frac{M^2}{\delta}\cdot K_g \sup_{t\in R} E\|y-z\|^2$$

$$= \frac{M^2}{\delta}(K_f+K_g)\sup_{t\in R} E\|y-z\|^2$$

由（H3）可知：$\frac{M^2(K_f+K_g)}{\delta}<1$，结合式（2-2）的均方渐近概周期性知，$\prod$是从$AAP(R,L^2(\Omega,H_1))$到本身的一个压缩映射，根据 Banach 不动点原理可知：$\prod$有唯一的不动点$x(t)\in AAP(R,L^2(\Omega,H))$，且满足方程（2-1）。

综上所述，方程（2-1）存在唯一的均方渐近概周期解。

□

2.4 本章小结

本章先介绍了概周期随机过程和均方渐近概周期随机过程的定义以及概周期随机过程的一个结果。其次，给出了关于渐近随机过程的复合问题。随后研究了均方渐近概周期随机过程在随机微分方程中的应用，利用均方渐近概周期函数的相关性质以及 Banach 不动点原理证明了一类随机微分方程在一定的条件下存在唯一的均方渐近概周期解。

第 3 章 一类非自治随机微分方程的均方渐近概周期解

3.1 引言

本章中$(H,\|\cdot\|)$是一个实可分的 Hilbert 空间，文献[32]1 对一类非自治的随机微分方程

$$dX(t)=A(t)X(t)dt+F(t,X(t))dt+G(t,X(t))dW(t) \qquad （3-1）$$

均方概周期解的存在性和唯一性进行了讨论，$A(t)$（$t\in R$）是满足“Acquistapace-Terreni”条件的一族稠密的闭合线性算子，存在常数$\lambda_0\geq 0$，$\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$L,K\geq 0$，$\alpha,\beta\in(0,1]$且$\alpha+\beta>1$，有：

$$\Sigma_\theta\cup\{0\}\subset\rho(A(t)-\lambda_0)\,,\ \|R(\lambda,A(t)-\lambda_0)\|\leq\frac{K}{1+|\lambda|} \qquad （3-2）$$

和

$$\|(A(t)-\lambda_0)R(\lambda,A(t)-\lambda_0)[R(\lambda_0,A(t))-R(\lambda_0,A(s))]\|\leq L|t-s|^\alpha|\lambda|^\beta$$

其中$t,s\in R$，$\lambda\in\Sigma_\theta:=\{\lambda\in C-\{0\}:|\arg\lambda|\leq\theta\}$，$F:R\times L^2(P,H)\to L^2(P,H)$和$G:R\times L^2(P,H)\to L^2(P,L_2^0)$是满足一定条件的联合连续函数。$\{W(t),t\in R\}$是一个可测$Q-Wiener$过程。

本节的第二部分，将给出均方概周期随机过程和均方渐近概周期随机过程的一些基本性质和定理以及算子开方族的定义。对于方程（3-1）的均方概周期解的存在唯一性已有文献进行了讨论，但目前还没有文献对其均方渐近概周期解给予讨论。本文的第三部分，将对这类非自治随机微分方程的均方渐近概周期解的存在性和唯一性进行讨论。

3.2 预备知识

本章节中(Ω,F,P)表示完备的概率空间。$(K,\|\cdot\|_K),(H,\|\cdot\|)$分别表示两个可分的 Hilbert 空间，$L_2(K,H)$是全部$K\to H$上算子的全体并赋予范数$\|\cdot\|_2$。由文献[32]2 可知$L^2(P,H)$表示一类强可测的，均方可积的随机过程的全体，则

$L^2(P,H)$ 显然是一个 Banach 空间，其中赋予的范数为 $\|X\|_{L^2(\Omega,H)}=(E\|X\|^2)^{1/2}$，这里 $E(h)=\int_\Omega h(\omega)dP(\omega)$。

假定系统：

$$u'(t)=A(t)u(t) \qquad t\geq s$$
$$u(s)=x\in L^2(P,H) \tag{3-3}$$

是具有相关的一致渐近稳定的算子开方族 $\{U(t,s):t,s\in R且t\geq s\}$。

定义 3.1[32]2-3 $L^2(P,H)$ 上一族有界的线性算子 $\{U(t,s):t,s\in R且t\geq s\}$ 被称作是（3.1）的算子开方族，是指以下条件成立：

a）$U(t,s)U(s,r)=U(t,r)$， $r\leq s\leq t$。

b）对于 $x\in X$ 函数 $(t,s)\to U(t,s)x$ 是连续的，且有 $U(t,s)\in L(L^2(P,H),D)$，$t>s$。

c）函数 $(s,t]\to L(L^2(P;H))$，$t\to U(t,s)$ 是可微的且有 $\frac{\partial}{\partial t}U(t,s)=A(t)U(t,s).$

本文用 $SBC(R,L^2(P,H))$ 表示全体有界连续的随机过程。赋予范数：

$$\|X\|_\infty=\sup_{t\in R}(E\|x(t)\|^2)^{1/2}$$

显然 $SBC(R,L^2(P,H))$ 是一个 Banach 空间。

用 $AP(R,L^2(P,H))$，$APP(R,L^2(P,H))$ 分别表示 R 到 $L^2(P,H)$ 上的全体均方概周期随机过程和全体均方渐近概周期随机过程。

引理 3.2[37]429 对于一个随机过程 $X:R\to L^2(P,H)$，有：

（1） 映射：$t\to E\|X(t)\|^2$ 是一致连续的；

（2） $AP(R,L^2(P,H))\subset SBC(R,L^2(P,H))$ 是一个闭子空间；

（3） $(AP(R,L^2(P,H)),\|\cdot\|_\infty)$ 是一个 Banach 空间。

显然，$SMC_0((R,L^2(P,H))$ 是 $SBC(R,L^2(P,H))$ 的一个闭线性子空间，定义无穷范数：$\|x\|_\infty=\sup_{t\in R}(E\|x(t)\|^2)^{1/2}$，$SMC_0((R,L^2(P,H))$ 在无穷范数下是一个 Banach 空间。

3.3 主要结论

在这一部分，首先给出几个假设：

（H0）算子 $A(t),U(r,s)$ 是可交换的，开方族 $U(t,s)$ 是渐近稳定的，即存在常数 $M,\delta>0$ 使得 $\|U(t,s)\|\leq Me^{-\delta(t-s)},t\geq s$。

此外：$R(\lambda_0,A(\cdot))\in AP(R;L(L^2(P,H)))$，这里的 λ_0 同（3-2）中的 λ_0。

（H1）联合连续函数$F:R\times L^2(P,H_1)\to L^2(P,H_2),(t,y)\to F(t,y)$关于$t\in R$是均方渐近概周期的且对于$y\in\Delta$（$\Delta\subset L^2(P,H_1)$是紧的）是一致的，并且有$F=g+h$成立，其中$g\in AP(R\times L^2(P,H_1),L^2(P,H_2))$，$h\in SMC_0$，并假设$F$和$g$满足 Lipschitz 条件：

$$E\|F(t,y)-F(t,z)\|^2\le K_1E\|y-z\|^2$$

$$E\|g(t,y)-g(t,z)\|^2\le K_3E\|y-z\|^2$$

这里$K_1,K_3>0$为常数，$y,z\in L^2(P,H_1)$且$t\in R.$

（H2）联合连续函数$G:R\times L^2(P,H_1)\to L^2(P,L_2^0),(t,y)\to F(t,y)$关于$t\in R$是均方渐近概周期的且对于$y\in\Delta$（$\Delta\subset L^2(P,H_1)$是紧的）是一致的，并且有$G=g_1+h_1$成立，其中$g_1\in AP(R\times L^2(P,H_1),L^2(P,H_2))$，$h_1\in SMC_0$，假设$G$和$g_1$满足 Lipschitz 条件：

$$E\|G(t,y)-G(t,z)\|_{L_2^0}^2\le K_2E\|y-z\|^2$$

$$E\|g_1(t,y)-g_1(t,z)\|_{L_2^0}^2\le K_4E\|y-z\|^2$$

这里$K_2,K_4>0$为常数，$y,z\in L^2(P,H_1)$且$t\in R.$

（H3）$\Theta=M^2(\frac{2K_1}{\delta^2}+\frac{K_2\cdot\mathrm{Tr}Q}{\delta})<1$

引理 3.3[32]4 假设$A(t)$满足”Acquistapace-Terreni” 条件，$U(t,s)$是渐近稳定的且有$R(\lambda_0,A(\cdot))\in AP(R;L(L(P,H)))$。令$h>0$，则对任意的$\varepsilon>0$，都存在$l(\varepsilon)>0$使得任意一个长度为$l$的区间上都至少包含一个$\tau$有：$\|U(t+\tau,s+\tau)-U(t,s)\|\le\varepsilon e^{-\frac{\delta}{2}(t-s)}$成立，这里$t-s\ge h$。

通过文献[32]5，可知方程（3-1）解的形式为：

$$X(t)=U(t,s)X(s)+\int_s^tU(t,\sigma)F(\sigma,X(\sigma))d\sigma$$

$$+\int_s^tU(t,\sigma)G(\sigma,X(\sigma))dW(\sigma) \qquad (3\text{-}4)$$

这里$t\ge s,s\in R$。

下面，给出本文的主要结果。

定理 3.4 在（H0）—（H3）的假设条件下，方程（3-1）有唯一的均方渐近概周期解且满足如下方程：

$$X(t)=\int_{-\infty}^tU(t,\sigma)F(\sigma,X(\sigma))d\sigma+\int_{-\infty}^tU(t,\sigma)G(\sigma,X(\sigma))dW(\sigma) \qquad (3\text{-}5)$$

证 首先，根据文献[32]5 中的定理 3.3，我们已经了知道解（3-5）式是满足式（3-4）的。

定义：

$$(\Phi X)(t)=\int_{-\infty}^{t}U(t,s)F(s,X(s))ds\text{，}\quad X\in AAP(R,L^2(P,H_1)) \tag{3-6}$$

$$(\Psi X)(t)=\int_{-\infty}^{t}U(t,s)G(s,X(s))dW(s)\text{，}\quad X\in AAP(R,L^2(P,H_1)) \tag{3-7}$$

先证明$(\Phi X)(t)$部分是均方渐近概周期的，因为 $F,X\in AAP(R,L^2(P,H))$，所以令：

$$F=g+h\text{，}\quad g\in AP(R,L^2(P,H))\text{，}\quad h\in SMC_0$$

$$X=x_1+x_2\text{，}\quad x_1\in AP(R,L^2(P,H))\text{，}\quad x_2\in SMC_0$$

通过变换得到：

$$\begin{aligned}F(s,X(s))&=g(s,x_1(s))+F(s,X(s))-g(s,x_1(s))\\&=g(s,x_1(s))+F(s,X(s))-F(s,x_1(s))+h(s,x_1(s))\end{aligned}$$

考虑 $h(s,x_1(s))$，令 $A=\overline{x_1(R)}$, 则 A 是紧的，因此存在 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m\in A$ 使得：$x_1(R)\subset\bigcup_{i=1}^{m}(\theta_i,\varepsilon)$，再考虑开集：

$$B_i=\{t\in R,x_1(t)\in B(\theta_i,\varepsilon)\},1\le i\le m.$$

于是可得到：

$$F(s,X(s))=g(s,x_1(s))+F(s,X(s))-F(s,x_1(s))+h(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)+h(s,\theta_i)$$

显然，$g(s,x_1(s))$是均方概周期的，再由文献[32]5 可知：$\int_{-\infty}^{t}U(t,s)g(s,x_1(s))ds$ 是均方概周期的。故只须证明：

$$\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[F(s,X(s))-F(s,x_1(s))+h(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)+h(s,\theta_i)]ds$$

是SMC_0分量即可。

由不等式$(a+b+c)^2\le 3a^2+3b^2+3c^2$得到：

$$\begin{aligned}&E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[F(s,X(s))-F(s,x_1(s))+h(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)+h(s,\theta_i)]ds\|^2\\\le&3E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[F(s,X(s))-F(s,x_1(s))]ds\|^2\\&+3\sum_{i=1}^{m}E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[h(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)]ds\|^2\\&+3\sum_{i=1}^{m}E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)h(s,\theta_i)ds\|^2\\=&I_1+I_2+I_3\end{aligned} \tag{3-8}$$

只需分别证明$I_1,I_2,I_3\in SMC_0$。

通过（H0）、（H1）、Holder 不等式、Fubini 定理有：

$$I_1 = 3E\|\int_{-\infty}^{t} U(t,s)[F(s,X(s)) - F(s,x_1(s))]\|^2$$
$$= 3E\|\int_{0}^{\infty} U(t,t-s)[F(t-s,X(t-s)) - F(t-s,x_1(t-s))]\|^2$$
$$\le 3M^2(\int_0^\infty e^{-\delta s}ds)\times(\int_0^\infty e^{-\delta s}K_1E\|x_2(t-s)\|^2\,ds)$$
$$\le \frac{3K_1M^2}{\delta}(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)\|^2\,ds)$$

又因为$x_2(\cdot)\in SMC_0$，所以对于任意的$\varepsilon>0$存在$N_1>0$，当$t\in R\setminus[-N_1,N_1]$时，$E\|x_2(t)\|^2\le\varepsilon$成立。另外，因为$\|U(t,s)\|\le Me^{-\delta(t-s)}$，所以对于上述的$\varepsilon>0$存在$N_1>0$，当$t-s\ge N_2$时$Me^{-\delta(t-s)}\le\varepsilon$成立。从而，当$|t|>N_1+N_2$时，必有：

$$I_1 \le \frac{3K_1M^2}{\delta}(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)\|^2\,ds)$$
$$\le \frac{3K_1M^2}{\delta}(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)\|^2\,ds + \int_{N_2}^\infty e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)\|^2\,ds)$$
$$\le \frac{3K_1M^2}{\delta}(\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{\delta} + \varepsilon\sup_{t\in R}E\|x_2(t-s)\|^2)$$

由ε的任意性，得到$\lim\limits_{t\to\infty} I_1 = 0$成立，即$I_1\in SMC_0$。

其次，证明$I_2\in SMC_0$，由（H1）易知

$$E\|h(t,y)-h(t,z)\|^2\le 2(K_1+K_3)E\|y-z\|^2$$

由此得到：

$$I_2 = 3\sum_{i=1}^m E\|\int_{-\infty}^t U(t,s)[h(s,x_1(s)) - h(s,\theta_i)]ds\|^2$$
$$= 3\sum_{i=1}^m E\|\int_0^\infty U(t,t-s)[h(t-s,x_1(t-s)) - h(t-s,\theta_i)]ds\|^2$$
$$\le 3M^2(\int_0^\infty e^{-\delta s}ds)\times\sum_{i=1}^m(\int_0^\infty e^{-\delta s}K_3E\|x_2(t-s)-\theta_i\|^2\,ds)$$
$$\le \frac{6(K_1+K_3)M^2}{\delta}\sum_{i=1}^m(\int_0^\infty e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)-\theta_i\|^2\,ds)$$
$$\le \frac{6(K_1+K_3)M^2m}{\delta^2}\varepsilon$$

由ε的任意性，得到$\lim\limits_{t\to\infty} I_2 = 0$，即$I_2\in SMC_0$.

最后证明I_3是SMC_0分量，由式（3-8）有：

$$I_3 = 3\sum_{i=1}^m E\|\int_{-\infty}^t U(t,s)h(s,\theta_i)ds\|^2$$

$$=3\sum_{i=1}^{m}E\|\int_0^{\infty}U(t,t-s)h(t-s,\theta_i)ds\|^2$$

$$\le 3M^2(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}ds)\times\sum_{i=1}^{m}(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}E\|h(t-s,\theta_i)\|^2\,ds)$$

$$\le\frac{3M^2}{\delta}\sum_{i=1}^{m}(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}E\|h(t-s,\theta_i)\|^2\,ds)$$

$$\le\frac{3M^2m}{\delta^2}\varepsilon$$

由此得到$\lim_{t\to\infty}I_3=0$成立，即$I_3\in SMC_0$。

综上所述$I_1,I_2,I_3\in SMC_0$，由此得到$(\Phi X)(t)$是均方渐近概周期的。类似的，我们将给出$(\Psi X)(t)$部分的证明。显然，这一部分比$(\Phi X)(t)$部分复杂，因为这其中包括$Wiener$过程W。根据文献[32]7，概周期方面的证明利用

$$\tilde{W}(s):=W(s+\tau)-W(\tau)$$

性质来解决。$\tilde{W}$同样也是一个$Wiener$过程且是W的广义函数。

$$(\Psi X)(t)=\int_{-\infty}^{t}U(t,s)G(s,X(s))dW(s)$$

其中$G\in AAP(R\times L^2(P,H_1),L^2(P,H_2))$。

令：

$$G=g_1+h_1,\quad g\in AP(R\times L^2(P,H_1),L^2(P,H_2)),\quad h_1\in SMC_0$$

$$X=x_1+x_2,\quad x_1\in AP(R,L^2(P,H_1)),\quad x_2\in SMC_0$$

类似的，可以得到：

$$G(s,X(s))=g_1(s,x_1(s))+G(s,X(s))-G(s,x_1(s))+h_1(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)+h_1(s,\theta_i)$$

显然$g_1(s,x_1(s))$是均方概周期的，通过文献[32]7 知：$\int_{-\infty}^{t}U(t,s)g_1(s,x_1(s))dW(s)$是均方概周期的。以下证明函数

$$\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[G(s,X(s))-G(s,x_1(s))+h_1(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)+h_1(s,\theta_i)]dW(s)\qquad（3\text{-}9）$$

属于SMC_0。

类似之前的证明，有：

$$E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[G(s,X(s))-G(s,x_1(s))+h_1(s,x_1(s))-h(s,\theta_i)+h_1(s,\theta_i)]dW(s)\|^2$$

$$\le 3E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[G(s,X(s))-G(s,x_1(s))]dW(s)\|^2$$

$$+3\sum_{i=1}^{m}E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[h_1(s,x_1(s))-h_1(s,\theta_i)]dW(s)\|^2$$

$$+3\sum_{i=1}^{m}E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)h(s,\theta_i)dW(s)\|^2$$
$$=J_1+J_2+J_3$$

通过（H0）、（H2）、Holder 不等式、Fubini 定理有：

$$J_1=3E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[G(s,X(s))-G(s,x_1(s))]dW(s)\|^2$$
$$=3E\|\int_{0}^{\infty}U(t,t-s)[G(t-s,X(t-s))-G(t-s,x_1(t-s))]dW(s)\|^2$$
$$\le 3\mathrm{Tr}QM^2(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}ds)\times(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}K_2E\|x_2(t-s)\|_{L_2^0}^2\ ds)$$
$$\le\frac{3\mathrm{Tr}QK_2M^2}{\delta}(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}E\|x_2(t-s)\|_{L_2^0}^2\ ds)$$

类似I_1的讨论过程，对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N_1>0$，在$R\backslash[-N_1,N_1]$范围内，$E\|x_2(\cdot)\|^2\le\varepsilon$成立。另外，因$\|U(t,s)\|\le Me^{-\delta(t-s)}$，所以上述的$\varepsilon>0$，必有当$t-s\ge N_2$时，$Me^{-\delta(t-s)}\le\varepsilon$成立。那么，当$|t|>N_1+N_2$时，必有：

$$J_1\le\frac{3\mathrm{Tr}QK_2M^2}{\delta}(\frac{\varepsilon-\varepsilon^2}{\delta}+\varepsilon\sup_{t\in R}E\|x_2(t-s)\|^2)$$

由此我们可知$J_1\in SMC_0$ 。

下面证J_2,J_3，根据（H2）得到$E\|h_1(t,y)-h_1(t,z)\|_{L_2^0}^2\le 2(K_2+K_4)E\|y-z\|^2$，因此

$$J_2=3\sum_{i=1}^{m}E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[h_1(s,x_1(s))-h_1(s,\theta_i)]dW(s)\|^2$$
$$\le 6\mathrm{Tr}Q(K_2+K_4)M^2(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}ds)\times\sum_{i=1}^{m}(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}E\|x_1(t-s)-\theta_i\|_{L_2^0}^2\ ds)$$
$$\le\frac{6\mathrm{Tr}Q(K_2+K_4)M^2}{\delta}\sum_{i=1}^{m}(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}E\|x_1(t-s)-\theta_i\|_{L_2^0}^2\ ds)$$
$$\le\frac{6\mathrm{Tr}Q(K_2+K_4)M^2m}{\delta^2}\varepsilon$$

$$J_3=3\sum_{i=1}^{m}E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)h_1(s,\theta_i)dW(s)\|^2$$
$$\le 3\mathrm{Tr}QM^2(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}ds)\times\sum_{i=1}^{m}(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}E\|h_1(t-s,\theta_i)\|_{L_2^0}^2\ ds)$$
$$\le\frac{3\mathrm{Tr}QM^2}{\delta}\sum_{i=1}^{m}(\int_0^{\infty}e^{-\delta s}E\|h_1(t-s,\theta_i)\|_{L_2^0}^2\ ds)$$

$$\le \frac{3\mathrm{Tr}QM^2m}{\delta^2}\varepsilon$$

由此，得到$J_1, J_2, J_3 \in SMC_0$，从而由式（3-9）定义的函数属于SMC_0。综上所述，我们得到：（3-4）式是方程的均方渐近概周期解。

最后通过 Banach 不动点原理证明方程均方渐近概周期解的唯一性。

定义映射：

$$(\Gamma Y)(t)=\int_{-\infty}^{t}U(t,s)F(s,Y(s))ds+\int_{-\infty}^{t}U(t,s)G(s,Y(s))dW(s) \qquad (3\text{-}10)$$

$$(\Gamma Z)(t)=\int_{-\infty}^{t}U(t,s)F(s,Z(s))ds+\int_{-\infty}^{t}U(t,s)G(s,Z(s))dW(s) \qquad (3\text{-}11)$$

由上面的证明，知Γ是$AAP(R,L^2(P,H))$上的自映射。为了完成证明，需证Γ是一个压缩映射。

$$E\|\Gamma Y(t)-\Gamma Z(t)\|^2$$

$$=E\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)F(s,Y(s))ds+\int_{-\infty}^{t}U(t,s)G(s,Y(s))dW(s)$$

$$-\int_{-\infty}^{t}U(t,s)F(s,Z(s))ds+\int_{-\infty}^{t}U(t,s)G(s,Z(s))dW(s)\|^2$$

利用不等式：$(a+b)^2\le 2a^2+2b^2$，我们得到：

$$E\|\Gamma Y(t)-\Gamma Z(t)\|^2$$

$$\le 2M^2E(\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta(t-s)}\|F(s,Y(s))-F(s,Z(s))\|ds)^2$$

$$+2E(\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[G(s,Y(s))-G(s,Z(s))]dW(s)\|)^2$$

通过文献[32]5-7、（H1）、（H2）我们得到：

$$E(\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta(t-s)}\|F(s,Y(s))-F(s,Z(s))\|ds)^2$$

$$\le K_1(\int_{-\infty}^{t}e^{-\delta(t-s)}ds)^2\sup_{t\in R}E\|Y(t)-Z(t)\|^2$$

$$\le \frac{K_1}{\delta^2}\|Y-Z\|_\infty .$$

同样，利用 Ito 积分，我们可以得到：

$$E(\|\int_{-\infty}^{t}U(t,s)[G(s,Y(s))-G(s,Z(s))]dW(s)\|)^2$$

$$\le \mathrm{Tr}Q\cdot M^2K_2(\int_{-\infty}^{t}e^{-2\delta(t-s)})\sup_{t\in R}E\|Y(t)-Z(t)\|^2$$

$$\le \mathrm{Tr}Q\cdot\frac{M^2K_2}{2\delta}\|Y-Z\|_\infty . \qquad (3\text{-}12)$$

综上，我们得到：

$$E\|\Gamma Y(t)-\Gamma Z(t)\|^2\le M^2(\frac{2K_1}{\delta^2}+\frac{K_2\cdot \mathrm{Tr}Q}{\delta})\|Y-Z\|_\infty$$

由（H3）得知$M^2(\frac{2K_1}{\delta^2}+\frac{K_2\cdot \mathrm{Tr}Q}{\delta})<1$，从而得到$\Gamma$是压缩映射。由 Banach 不动点原理可知$\Gamma$在$AAP(R,L^2(P,H))$上有唯一的不动点。此不动点即为式（3-5）定义的$X(t)$。

综上所述：式（3-5）是方程（3-1）的唯一的均方渐近概周期温和解。

口

3.4 本章小结

本章节对可分 Hilbert 空间中的一类非自治随机微分方程的均方渐近概周期解进行了研究，主要是利用“Acquistapace-Terreni”条件、开方族和 Banach 不动点原理给出了该类非自治随机微分方程均方渐近概周期解的存在性和唯一性的证明。

结论

本文对两类随机微分方程的均方渐近概周期解的存在唯一性进行了研究，具体结论如下：

1.证明了一类非线性随机微分方程在一定的充分条件下存在唯一的均方渐近该周期解。主要结合均方渐近概周期随机过程的有关性质，Fubini 定理以及 Holder 不等式证明了该类解在一类渐近稳定的算子半群下的均方渐近概周期解的存在性，以及利用 Banach 不动点原理证明了该类方程在所给条件下存在唯一的均方渐近概周期解。

2.给出了一类非自治随机微分方程有唯一均方渐近概周期的条件。证明过程中主要结合了均方渐近概周期随机过程、算子开方族等有关理论，并结合了 Banach 不动点原理。

3.综合两类随机方程分别基于算子半群和开方族下的解的性质，得到了算子半群和算子开方族的一些近似性质，此外根据其性质得到了两类随机微分方程存在均方渐近概周期解的条件。对比这两类方程的求解证明过程，得到了随机方程存在概周期类型解的基本必要条件。

展望：

本文主要是在已有文献对相应方程均方概周期解证明的理论基础上，对其均方渐近概周期解的存在唯一性进行了研究，这两类方程是否在同样条件下存在唯一的均方伪概周期解的问题将有待研究。另外，本文应用 Banach 不动点原理时均假设其映像系数小于 1，但是在实际应用过程中却未必满足这一条件，所以在其不满足系数小于 1 时，利用非扩张映射去研究渐近不动点序列可以作为另一个研究课题。

参考文献

[1] BOHR H. Zur Theorie Der Fast Periodischen Funktionen [J]. Acta. Math, 1925-1926, 45, 29-127. 46,101-214. 47,237-281.

[2] BOHR H. Zur Theorie Der Fastperiodischen Funktionen [J]. Acta, Math, 1926, 47: 237-281.

[3] BOCHNER S. A New Approach to Almost Periodicity [J]. Proc. Nat. Acad, Sci. U.S.A.1962, (48): 2039-2043.

[4] BOCHNER S, NEUMANN.J.V. Almost Periodic Functions in Group II [J]. Trans. Amer. Math. Soc.1935, 37(1): 21-50.

[5] BESICOVITCH.A. Almost Periodic Functions [M]. Dover Publications Inc, New York.1955.

[6] FAVARD J. Sur Les Equations Differentielles Lineaires a Coefficients Presqueperiodi-ques [J]. Acta. Math, 1928, 51(1): 31-81.

[7] STEPANOFF W. Ueber Einige Verallgemeinerungen Der Fast Periodischen Functionen [J]. Math. Ann, 1926, 95(1): 473-498.

[8] SATYANARAYAN.R A. On the Stepanov Almost Periodic Solutions of a Second-order Infinitesimal Generator of Differential Equations. Internet [J]. J. Math. Math, Sci.1991, 26(3): 3-12.

[9] HU Z. Contributions to the Theory of Almost Periodic Differential Equations [D]. Carleton University. Thesis, 2001: 5-9.

[10] NEUMANN.J V. Almost-periodic Functions in a Group. I [J]. Trans Amer. Math. Soc, 1934, 36(3): 445-492.

[11] FRECHET M. Les Fonctions Asymptotiquement Presque-periodiques [J]. Continues. C.R. Acad. Sci. Paris. 1941, 213: 520-522.

[12] EBERLEIN W F. Abstract Ergodic Theorems and Weak Almost Periodic Functions [J]. Trans. Math. Soc, 1949.

[13] ONICESU O, ISTRATESCU V. Approximation Theorems for Random Functions [J]. Rend. Mat, 1975: 65-81.

[14] CENUSA G, ONICESU O. I.Sacuiu. Random Functions Almost Periodic in Probability [M]. Bucharest Editura Academiei Republicii Socialiste Romania, 1983: 2-78.

[15] SARASON D. Remotely Almost Periodic Function [J]. Contemoporary Mathematics, 1984, 32: 237-242.

[16] ZHANG CHUANYI. Pseudo Almost Periodic Functions and Their Applications [D]. University of Western Ontario, Ph.D. thesis, 1992: 2-12.

[17] ZHANG CHUANYI. Pseudo Almost Periodic Solutions of Some Differential Equations [J]. J. Math. Anal. Appl, 1994, 181(1): 62-76.

[18] ZHANG CHUANYI. Vector-valued Pseudo Almost Periodic Functions[J]. Czechoslovak Math. J, 1997, 47(3): 385-394.

[19] ZHANG CHUANYI. Vector-valued Means and Weakly Almost Periodic Functions [J]. Internat. J. Math. Math, Sci. 1994, 17: 227-238.

[20] ZHANG CHUANYI. Intergration of Vector-valued Pseudo Almost Periodic Functions [J]. Proc. Amer. Math, Soc. 1994(121): 62-76.

[21] ZHANG CHUANYI. Pesudo Almost Periodic Solutions of Some Differential Equations [J]. J. Math. Anal. Appl, 1995(192): 543-561.

[22] ZHANG CHUANYI. Ergodicity and its Applications-part One: Basic Properties [J]. Acta Analysis Functionlis Applicata, 1999(1): 28-39.

[23] SLUTSKY. Sur Les Functions Aleatoires Presque Periodiques et Sur La Decomposition Des Functions Aleatoires [J]. Actualites Sceintifiques et industrielles, 1938, 738: 33-35.

[24] TUDOR C. Almost Periodic Solutions of Affine Stochastic Evolution Equations [J]. Stochasics and Stochastics Reports, 1992, 38: 251-266.

[25] MORROZAN T, TUDOR C. Almost Periodic Solutions of Affine Ito's Equations [J]. Stoch. Anal. Appl, 1989, 7: 451-474.

[26] HURD H, RUSSEK A, SURGAILIS D. Notes on Almost Periodic Distributed Processes [M]. Unpublished Manuscript.

[27] 江丽娜. 概周期型函数和概周期型微分方程的解[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学博士学位论文. 2007: 52-66.

[28] BEZANDRY PAUL H, DIAGANA TOKA. Existence of Almost Periodic Solutions to Some Stochastic Differential Equations [J]. Applicable Analysis. 2007, 86: 819-827.

[29] CARABALLO T, REAL J. and TANIGUCHI T. The Exponential Stability of Neutral Stochastic Delay Partial Differential Equations [J]. Discrete Contin. Dyn. Syst, 2007: 295-313.

[30] Luo J. Exponential Stability for Stochastic Neutral Partial Functional Differential Equations [J]. Journal of Mathematatial Analysis and Applications, 2009, 355: 414-425.
[31] GOVINDAN T E. Almost Sure Exponential Stability For Stochastic Neutral Functional Differential Equations [J]. Stochastics, 2005, 77: 139-154.
[32] BEZANDRY PAUL H, DIAGANA TOKA. Square-mean Almost Periodic Solutions Non-autonomous Stochastic Differential Equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2007, 117: 1-10.
[33] BEZANDRY PAUL H, DIAGANA TOKA. Existence of Almost Periodic Solutions to Some Functional Integro-differential Stochastic Evolution Equations [J].Statist. Probab. Lett, 2008, 78: 2844-2849.
[34] BEZANDRY PAUL H, DIAGANA TOKA. Existence of Quadratic-mean Almost Periodic Solutions to Some Stochastic Hyperbolic Differential Equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2009, 11: 1-14.
[35] BEZANDRY PAUL H, DIAGANA TOKA. Existence of Square-mean Almost Periodic Mild Solutions to Some Nonautonomous Stochastic Second-order Differential Equations [J]. Electronic Journal of Differential Equations, 2010, 124: 1-25.
[36] BEZANDRY PAUL H, DIAGANA TOKA. Almost Periodic Stochastic Processes. [M]. New York: Springer, April. 2011: 1-223.
[37] CHERIF FAROUK. Quadratic-mean Pseudo Almost Periodic Solutions to Some Stochastic Differential Equations in a Hilbert Space. [J]. J. Appl Math. Comput, 2012, 40: 427-443.
[38] BEZANDRY PAUL H, DIAGANA TOKA. P-th Mean Pseudo Almost Automorphic Mild Solutions to Some Nonautonomous Stochastic Differential Equations [J]. J. Appl Math, 2011: 1-10.
[39] DIAGANA TOKA. Existence of Doubly-weighted Pseudo Almost Periodic Solutions to Non-autonomous Differential Equations. [J]. Electron. J. Diff. Equ, 2011, 28: 1-15.
[40] 姚慧丽，颜荣．一类差分方程的遥远概周期序列解的唯一存在性[J]．哈尔滨理工大学学报, 2011, 16(5): 85-88.
[41] 姚慧丽，李雪鑫，付作娴．一类中立型微分方程的渐近概周期温和解[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2012, 17(6): 65-67.

[42] 姚慧丽, 宋晓秋, 李兴华. 一类半线性微分方程的渐近概自守温和解[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2012, 17(1): 1-3.
[43] 曹俊飞. 随机泛函微分方程的概周期性及概自守性研究[D]. 广州:华南理工大学博士学位论文, 2004: 18-25.
[44] LIU WEIGUO. LUO JIAOWAN. Existence of Almost Periodic Solutions to Some Semi-linear Stochastic Integro-differential Equations [J]. Ann of Diff Eqs, 2013, 29(1): 34-43.
[45] 纪德生, 张传义. 加权 Stepanov 伪概自守的一些基本性质及其对 Volterra 积分方程的应用[J]. 中国科学: 数学, 2014, 44(4): 349-368.
[46] 纪德生. 伪概周期型与伪概自守性函数[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学博士学位论文, 2014: 1-91.
[47] WANG QI. LU DICHENG. Almost Periodic Solutions For Impulsive Neutral Functional Differential Systems [J]. Mathematica Applicata. 2015, 28(1): 41-46.

攻读学位期间发表的学术论文

[1] 姚慧丽，王健伟．一类随机积分-微分方程的均方渐近概周期解[J]．哈尔滨理工大学学报. 2014, 19(6): 118-122.

致谢

不知不觉，已在这里将近七年的时光了，回顾近七年的学习生涯，或许失去的要比得到的更多一些，这使我从来也不敢想象。但毕竟在这段时光里，我又有了新的成长，或许这是我内心中仅有的慰藉。

不得不说，我的专业知识水平在这其间上升了一个台阶，这里有自己的努力更有导师姚慧丽教授的辛勤汗水。姚老师在学习上的认真严谨态度是我学习的榜样，对生活的态度更使我一生受益。从论文的选题，资料搜集到开题，从论文的修改一直到完成，这都离不开您的指导和讲解，正因为 X 老师的帮助才能有现在论文的完成，在这里我要真挚对姚老师说一声：老师您辛苦了。

同时还要感谢在学习和生活上给我帮助的同学、老师和朋友，感谢你们的一直陪伴和鼓励，在此学生一并致谢。

硕士学习阶段即将结束，意味着要离开了伴随我七年的哈尔滨理工大学。但愿今后回忆起这段人生旅程时，不会感到过分的遗憾……